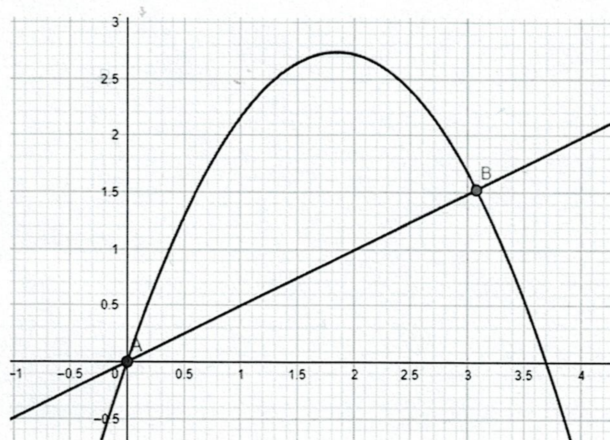
Bortolani's Theorem

Behauptung:

Sei p eine Parabel und $s = AB$ eine Parabelsehne. Seien t_A und t_B die Tangenten zur Parabel im Punkt A bzw. B. Sei dann $P = t_A \cap t_B$ der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Die Fläche A_Δ des Dreiecks ABP steht zur Fläche A_p des Parabelsegments wie $3:2$.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Parabel und die Gerade so verschieben, dass der Punkt A dem Ursprung des Koordinatensystems entspricht, die Achse der Parabel parallel zur y-Achse ist und der Scheitelpunkt im ersten Quadranten liegt.



Die Gleichung einer allgemeinen Parabel durch A lautet dann:

$p(x) = a\,x\,(x - x_0)$ mit $a < 0$ und $x_0 > 0$.

Sei $B = (x_1, y_1)$.

- Geradengleichung für s
- Geradengleichung der beiden Tangenten
- Schnittpunkt P
- Höhe h als Abstand $P - s$ mit der Hesse-Form
- Fläche $A_\Delta = \frac{1}{2}\,AB \cdot h$
- Fläche $A_p = \int_0^{x_1} \big(p(x) - s(x)\big)dx$
- $\frac{A_\Delta}{A_p} = \frac{3}{2}$!